Лекція № 23

Продовжуємо вивчати поле на далеких відстанях від системи зарядів. Потенціал поля шукали за допомогою розкладання точної формули (6.31) (або (6.32)) у тривимірний ряд Тейлора

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \varphi^{(3)} + \ldots$$

по малим параметрам $|x'|,|y'|,|z'| \ll r$ в знаменнику (6.31) (або (6.32)). Отримали розкладання по мультипольних моментах. Для системи точкових зарядів це така формула (див. (6.39))

$$\varphi(x,y,z) = \left(\sum_{a=1}^{N} e_a\right)\frac{1}{r} - \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\sum_{a=1}^{N} e_a x_{a\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2!}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\left(\sum_{a=1}^{N} e_a x_{a\alpha} x_{a\beta}\right)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right) -$$
$$-\frac{1}{3!}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3}\left(\sum_{a=1}^{N} e_a x_{a\alpha} x_{a\beta} x_{a\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left(\frac{1}{r}\right) + \ldots$$

В нульовому наближенні маємо поле точкового заряду $\varphi^{(0)} = \dfrac{q}{r}$. Наступне – дипольне наближення – стає важливим, якщо повний заряд системи дорівнює нулю. Для поля диполя отримали потенціал та напруженість (ф-ли (6.42) та (6.44)) відповідно

$$\varphi^{(1)} = \frac{(\vec{d},\vec{r})}{r^3}; \ \vec{E} = \frac{3(\vec{d},\vec{r})\vec{r} - \vec{d}r^2}{r^5}.$$

Для досить симетричної системи зарядів може статися так, що не тільки повний заряд, а й дипольний момент системи виявиться нульовим. Тоді важливим стає наступне наближення – квадрупольне.

6.6.2. Мультипольні моменти

Квадрупольний момент

$$Q_{\alpha\beta} = \iiint_V \rho(\vec{r}')x'_\alpha x'_\beta dV' = \sum_{a=1}^{N} e_a x_{a\alpha} x_{a\beta}. \qquad (6.45)$$

Квадрупольний момент є симетричним тривимірним тензором 2-го рангу. Потенціал квадрупольного наближення

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}Q_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}Q_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[x_\beta\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}Q_{\alpha\beta}\left(\frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5}-\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3}\right)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}Q_{\alpha\beta}\left(\frac{3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta}}{r^5}\right). \qquad (6.46)$$

Покажено, як можна отримати формули для дипольного та квадрупольного наближення, не використовуючи розклад в ряд Тейлора та без обчислення похідних.

Виходимо з формули для потенціалу поля системи точкових зарядів

$$\varphi(\vec r)=\sum_{a=1}^{N}\frac{e_a}{|\vec r-\vec r_a|};$$

$$|\vec r_a|\ll|\vec r|;$$

$$|\vec r-\vec r_a|=\sqrt{(\vec r-\vec r_a)\cdot(\vec r-\vec r_a)}=\sqrt{r^2-2\vec r\cdot\vec r_a+r_a^2}=r\sqrt{1-2\frac{\vec r\cdot\vec r_a}{r^2}+\frac{r_a^2}{r^2}};$$

$$(1+\alpha)^n\approx1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2+\ldots;$$

$$\frac{1}{|\vec r-\vec r_a|}=\frac{1}{r}\left(1-2\frac{\vec r\cdot\vec r_a}{r^2}+\frac{r_a^2}{r^2}\right)^{-1/2}=$$

$$\frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{2}\left(-2\frac{\vec r\cdot\vec r_a}{r^2}+\frac{r_a^2}{r^2}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\frac{1}{2}\left(-2\frac{\vec r\cdot\vec r_a}{r^2}+\frac{r_a^2}{r^2}\right)^2+\ldots\right]\approx$$

$$\approx\frac{1}{r}+\frac{\vec r\cdot\vec r_a}{r^3}+\frac{3}{2}\frac{(\vec r\cdot\vec r_a)^2}{r^5}-\frac{1}{2}\left(\frac{r_a^2}{r^3}\right)=\frac{1}{r}+\frac{\vec r\cdot\vec r_a}{r^3}+\frac{3(\vec r\cdot\vec r_a)^2-r^2r_a^2}{2r^5}.$$

Дипольне наближення ($\varphi^{(0)}+\varphi^{(1)}$):

$$\varphi=\sum_{a=1}^{N}\frac{e_a}{|\vec r-\vec r_a|}\approx\sum_{a=1}^{N}\frac{e_a}{r}\left(1+\frac{\vec r\cdot\vec r_a}{r^2}\right)=\frac{1}{r}\sum_{a=1}^{N}e_a+\frac{\vec r}{r^3}\left(\sum_{a=1}^{N}e_a\vec r_a\right)$$

Наступне квадрупольне наближення ($\varphi^{(0)}+\varphi^{(1)}+\varphi^{(2)}$):

$$\varphi=\sum_{a=1}^{N}\frac{e_a}{|\vec r-\vec r_a|}\approx\frac{1}{r}\sum_{a=1}^{N}e_a+\frac{\vec r}{r^3}\left(\sum_{a=1}^{N}e_a\vec r_a\right)+\frac{1}{2r^5}\sum_{a=1}^{N}e_a\left[3(\vec r_a\cdot\vec r)^2-r_a^2r^2\right];$$

Розкриємо дужки у квадраті скалярному добутку

$$(\vec{r}_a \cdot \vec{r})^2 = \left(x_a x + y_a y + z_a z\right)^2 = x_a^2 x^2 + y_a^2 y^2 + z_a^2 z^2 + 2x_a y_a xy + 2x_a z_a xz + 2y_a z_a yz;$$

$$\frac{1}{2r^5}\left[3(x_a^2 x^2 + y_a^2 y^2 + z_a^2 z^2 + 2x_a y_a xy + 2x_a z_a xz + 2y_a z_a yz) - (x_a^2 + y_a^2 + z_a^2) r^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2r^5}\left[x_a^2(3x^2 - r^2) + y_a^2(3y^2 - r^2) + z_a^2(3z^2 - r^2) + 6(x_a y_a xy + x_a z_a xz + y_a z_a yz)\right] =$$

$$= \frac{1}{2r^5}\Big[x_a^2(2x^2 - y^2 - z^2) + y_a^2(2y^2 - z^2 - x^2) + z_a^2(2z^2 - x^2 - y^2) +$$
$$+ 6(x_a y_a xy + x_a z_a xz + y_a z_a yz)\Big]$$

Перепишемо формулу для квадрупольного потенціалу «детально»

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2r^5}\sum_{a=1}^{N} e_a\left[x_a^2(2x^2 - y^2 - z^2) + y_a^2(2y^2 - z^2 - x^2) + z_a^2(2z^2 - x^2 - y^2)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2r^5}\sum_{a=1}^{N} e_a\left[6(x_a y_a xy + x_a z_a xz + y_a z_a yz)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(2x^2 - y^2 - z^2)}{r^5}\sum_{a=1}^{N} e_a x_a^2 + \frac{(2y^2 - z^2 - x^2)}{2r^5}\sum_{a=1}^{N} e_a y_a^2 + \frac{(2z^2 - x^2 - y^2)}{2r^5}\sum_{a=1}^{N} e_a z_a^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{xy}{2r^5}\sum_{a=1}^{N} 6 e_a x_a y_a + \frac{xz}{2r^5}\sum_{a=1}^{N} 6 e_a x_a z_a + \frac{yz}{2r^5}\sum_{a=1}^{N} 6 e_a y_a z_a\right\};$$

$$Q_{xx} = \sum_{a=1}^{N} e_a x_a^2; \quad Q_{yy} = \sum_{a=1}^{N} e_a y_a^2; \quad Q_{zz} = \sum_{a=1}^{N} e_a z_a^2;$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = \sum_{a=1}^{N} e_a x_a y_a; \quad Q_{xz} = Q_{zx} = \sum_{a=1}^{N} e_a x_a z_a; \quad Q_{yz} = Q_{zy} = \sum_{a=1}^{N} e_a y_a z_a;$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{(2x^2 - y^2 - z^2)}{r^5} Q_{xx} + \frac{(2y^2 - z^2 - x^2)}{r^5} Q_{yy} + \frac{(2z^2 - x^2 - y^2)}{r^5} Q_{zz} + \right.$$
$$\left. + \frac{6xy}{r^5} Q_{xy} + \frac{6xz}{r^5} Q_{xz} + \frac{6yz}{r^5} Q_{yz}\right\};$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix}$$

В літературі можна знайти трохи інше визначення квадрупольного моменту

$$D_{\alpha\beta} = \iiint_V \rho(\vec{r}\,')\left(3x'_\alpha x'_\beta - r'^2\delta_{\alpha\beta}\right)dV' = \sum_{a=1}^{N} e_a\left(3x_{a\alpha} x_{a\beta} - r_a^2\delta_{\alpha\beta}\right). \qquad (6.47)$$

При такому визначенні сума діагональних елементів

Тоді

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{6}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\underbrace{\left(\sum_{a=1}^{N} e_a(3x_{a\alpha}x_{a\beta} - \delta_{\alpha,\beta}r_a^2)\right)}_{D_{\alpha\beta}}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\underbrace{\left(\sum_{a=1}^{N} e_a x_{a\alpha}x_{a\beta}\right)}_{Q_{\alpha\beta}}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right)\right) - \frac{1}{6}\underbrace{\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\left(\sum_{a=1}^{N} e_a\delta_{\alpha,\beta}r_a^2)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right)\right)}_{=0};$$

Другий член звертається до нуля, бо $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ – це розв'язок рівняння Лапласа:

$$\left(\sum_{a=1}^{N} e_a r_a^2\right)\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\delta_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \left(\sum_{a=1}^{N} e_a r_a^2\right)\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\sum_{a=1}^{N} e_a r_a^2\right)\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

Ось різні записи квадрупольного потенціалу

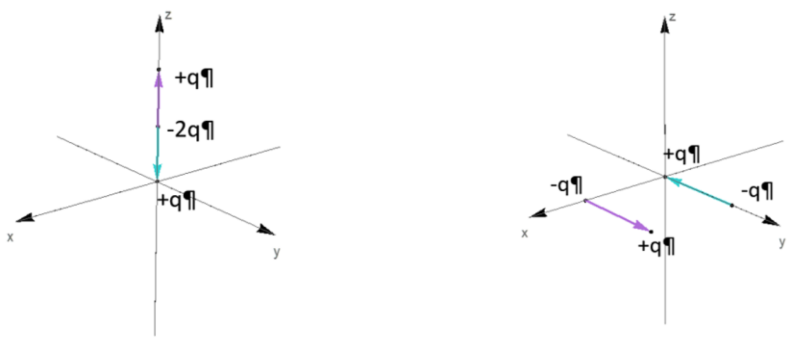
$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} Q_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{6}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} D_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} D_{\alpha\beta}\frac{x_\alpha x_\beta}{r^5}.$$

Які переваги формули (6.47)? Нагадаємо, що симетричний тензор другого рангу можна привести до діагонального вигляду (до головних осей). Маємо три діагональні компоненти D_{11}, D_{22}, D_{33} З визначення (6.47) випливає, що

$$D_{11} + D_{22} + D_{33} = 0.$$

$D_{\alpha\beta}$ має 5 незалежних компонент та 2 незалежних головних значення.

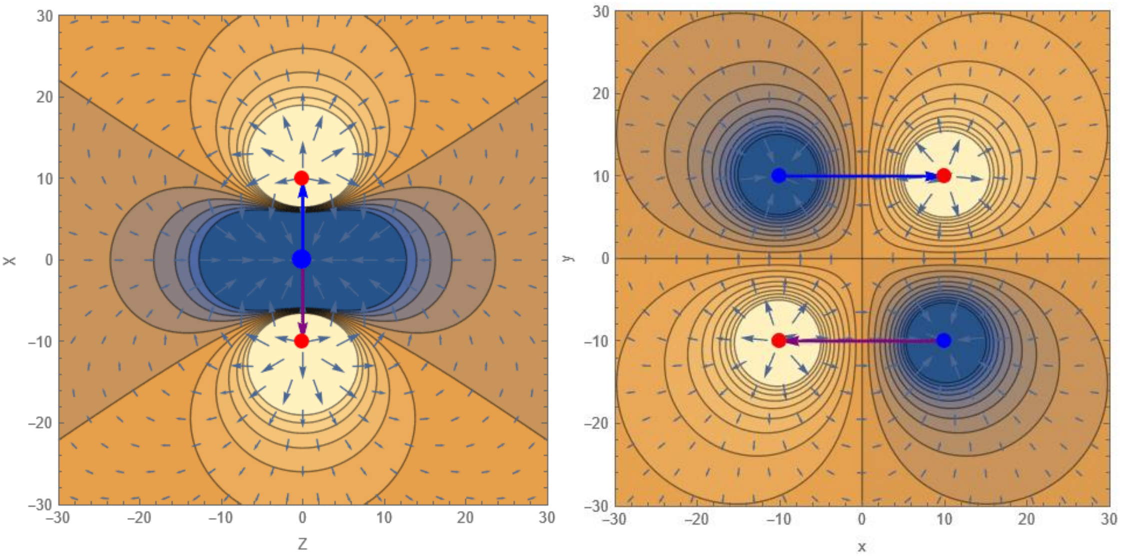
Наведемо два приклади систем зарядів, які мають квадрупольний момент (див. рис.)



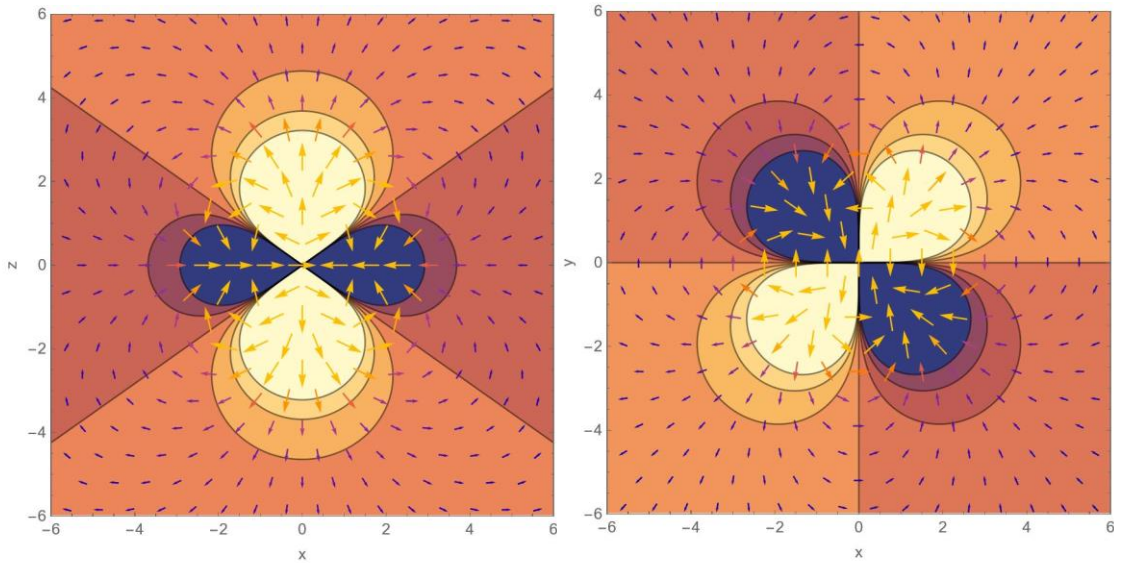
(а) (б)

(а) – лінійний квадруполь; (б) – плаский квадруполь.

В презентації до лекції було показано дві демонстрації, які ілюструють, як змінюється поле зі зменшенням відстані між зарядами.



Квадруполі (лінійний та пласкій) скінченних розмірів



Точкові лінійний та плаский квадруполі

$$\varphi_{\text{лін.квадруполь}} = qa^2\,\frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^5} \qquad\qquad \varphi_{\text{пласк.квадруполь}} = 3qa^2\,\frac{xy}{r^5}$$

Наступне наближення – октупольне.

Октупольний момент

$$Q_{\alpha\beta\gamma} = \iiint\limits_V \rho(\vec{r}\,')x'_\alpha x'_\beta x'_\gamma dV' = \sum_{a=1}^{N} e_a x_{a\alpha} x_{a\beta} x_{a\gamma} \tag{6.48}$$

Октупольний потенціал

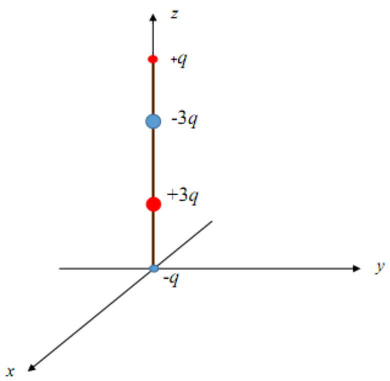
$$\varphi^{(3)} = -\frac{1}{6} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3} Q_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left(\frac{1}{r} \right). \tag{6.49}$$

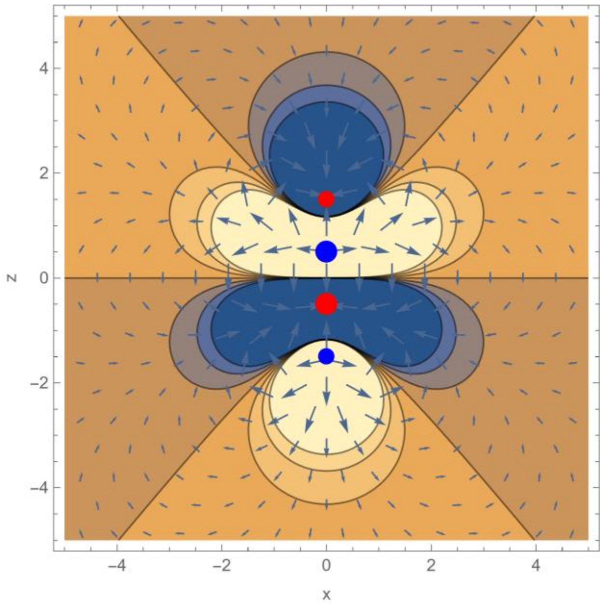
Октупольний момент – повністю симетричний тривимірний тензор 3-го рангу. 2^n-польний момент є симетричним тензором n-го рангу.

Моделювання поля лінійного квадруполя

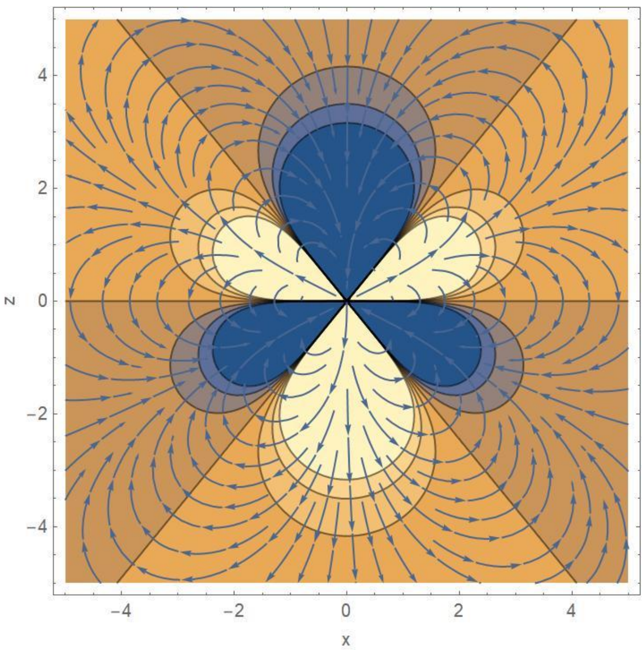
Потенціал лінійного октуполя

$$\varphi^{(3)} = qa^3 \left(\frac{15z^3 - 9r^2 z}{r^7} \right).$$





Лінійний октуполь скінченних розмірів



Точковий октуполь

6.7. Енергія електростатичного поля

Енергія електромагнітного поля визначається формулою (5.35)

$$w = \frac{1}{8\pi}\iiint\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right)dV.$$

Інтеграл береться по усьому нескінченному об'єму.

У випадку електростатичного поля $\vec{H} = 0$, тому

$$w = \frac{1}{8\pi}\iiint\vec{E}^2 dV. \tag{6.50}$$

Виразимо цю енергію через густину заряду та електростатичний потенціал. Скористаємось визначенням напруженості електростатичного поля через електростатичний потенціал $\vec{E} = -\nabla\varphi$ та представимо скалярний добуток $\vec{E}^2 = (\vec{E}, \vec{E})$ так

$$(\vec{E}, \vec{E}) = -(\vec{E}, \nabla\varphi)$$

Рівняння Максвелла $\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho$ дозволить ввести в формулу густину заряду. Скористаємося відомою формулою

$$\mathrm{div}\left(\varphi\vec{a}\right) = \left(\nabla, \varphi\vec{a}\right) = \varphi\left(\nabla, \vec{a}\right) + \left(\vec{a}, \nabla\varphi\right);$$
$$\left(\vec{a}, \nabla\varphi\right) = \mathrm{div}\left(\varphi\vec{a}\right) - \varphi\left(\nabla, \vec{a}\right);$$

$$-(\vec{E}, \nabla\varphi) = -\left(\nabla, \varphi\vec{E}\right) + \varphi\underbrace{\left(\nabla, \vec{E}\right)}_{4\pi\rho} = -\mathrm{div}(\varphi\vec{E}) + 4\pi\rho\varphi.$$

Тепер

$$w = \frac{1}{8\pi}\iiint\vec{E}^2 dV = -\frac{1}{8\pi}\iiint\mathrm{div}(\varphi\vec{E})dV + \frac{1}{2}\iiint_V \rho\varphi dV =$$
$$= \underbrace{\cancel{\oint_S \varphi\vec{E}d\vec{S}}}_{\to 0,\ if\ S\to\infty} + \frac{1}{2}\iiint_V \rho\varphi dV = \frac{1}{2}\iiint_V \rho\varphi dV.$$

Домовились, що заряди знаходяться у скінченному об'ємі, тому на нескінченно віддаленій поверхні поля немає. Отримали наступну формулу для енергії електростатичного поля

$$w = \frac{1}{2}\iiint_V \rho\varphi dV. \tag{6.51}$$

В (6.51) інтеграл береться тільки по тій області, де густина заряду $\rho \neq 0$. В (6.50) інтегрування відбувається по усьому простору. Таким чином маємо дві формули для скінченної системи зарядів

$$w = \frac{1}{8\pi}\iiint \vec{E}^2 dV = \frac{1}{2}\iiint_V \rho\varphi dV.$$

Для системи точкових зарядів з густиною $\rho(\vec{r}) = \sum_{a=1}^{N} e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$ інтегрування знімається:

$$w = \frac{1}{2}\iiint_V \rho(\vec{r}')\varphi(\vec{r}')dV' = \frac{1}{2}\iiint_V \sum_{a=1}^{N} e_a \delta(\vec{r}' - \vec{r}_a)\varphi(\vec{r}')dV' =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} e_a \iiint_V \delta(\vec{r}' - \vec{r}_a)\varphi(\vec{r}')dV' = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} e_a \varphi_a.$$

$$w = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} e_a \varphi_a. \tag{6.52}$$

Тут φ_a – це потенціал поля, яке створюють всі заряди в точці, де знаходиться заряд e_a.

Яким буде потенціал поля для одного точкового заряду?

$$w = \frac{1}{2}e\varphi; \quad \varphi = \frac{e}{R}.$$

В точці, де знаходиться заряд, $R = 0$, тому

$$\varphi = \frac{e^2}{R} \to \infty; \quad w \to \infty!$$

6.7.1. Границі застосування класичної електродинаміки

Власна енергія елементарної частинки нескінченна, як і маса. Класична електродинаміка справедлива в певних межах. Вона не може бути застосована до елементарних частинок на дуже малих відстанях від частинок, де треба враховувати квантові ефекти.

Якщо розглядати електрон, як кульку певних розмірів R_e, то його власна потенціальна енергія буде порядку $\frac{e^2}{R_e}$. Ця енергія повинна буди порядку енергії спокою електрона $m_e c^2$. Маємо таку оцінку радіусу електрона

$$\frac{e^2}{R_e} \sim m_e c^2;$$

$$R_e \sim \frac{e^2}{m_e c^2}. \qquad (6.53)$$

Формула (6.53) визначає межі застосування класичної електродинаміки. Насправді ці межі набагато вищі, бо квантові ефекти стають суттєвими на значно більших відстанях.

Ось «квантовомеханічна» оцінка з урахуванням співвідношення невизначеності Гейзерберга

$$\frac{p^2}{2m_e} \sim m_e c^2; \quad p \sim m_e c; \quad p \cdot R_{quant} \sim \hbar; \quad m_e c R_{quant} \sim \hbar;$$

$$R_{quant.} \sim \frac{\hbar}{mc}. \qquad (6.54)$$

Відношення цих радіусів

$$\frac{R_{quant}}{R_e} = \frac{\hbar}{m_e c} \frac{m_e c^2}{e^2} = \frac{\hbar c}{e^2} = 137.$$

Величину

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

Називають сталою тонкої структури. Введена була в 1916 році А.Зомерфельдом при розгляді прецесійного руху релятивістського електрона в полі атомного воднеподібного ядра. Свою назву вона отримала в зв'язку з тим, що вона визначає тонку структуру спектру атома водню. Стала є безрозмірною величиною, а її чисельне значення не залежить від вибраної системи одиниць.